MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 10
8.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Zeigen Sie **ohne** Berechnung der euklidischen Normalform, daß es sich bei

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 + x + 2y + 2 = 0 \right\}$$

um eine Ellipse handelt.

2. Für $s \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 - 2xy + sy^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \right\}$$

gegeben.

   a) Zu welcher der drei Typenklassen
      i) Ellipse, Punkt, $\varnothing$
      ii) Hyperbel, sich schneidendes Geradenpaar
      iii) Parabel, paralleles Geradenpaar, Doppelgerade, $\varnothing$

      gehört – in Abhängigkeit von s – die Quadrik Q?

   b) Zeigen Sie, daß Q im Fall $s = 1$ ein paralleles Geradenpaar ist und geben Sie dieses an.

   Lösen Sie diese Aufgabe **ohne** Berechnung der euklidischen Normalform!

3. *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 5)*
   Zeigen Sie durch Berechnung der euklidischen Normalform, daß

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; 3\,x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 - 2\,x + 10\,y - 5 = 0 \right\}$$

im euklidischen $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse ist. Bestimmen Sie ihren Mittelpunkt, ihre Hauptachsen, sowie ihre Scheitel. Fertigen Sie eine Skizze von Q an.

4. a) Gegeben seien die vier Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie zwei Quadriken Q_1, Q_2 **verschiedenen Typs** an, auf denen jeweils die Punkte $P_1, ..., P_4$ liegen (Angabe jeweils einer Gleichung mit Skizze der Quadrik!).

b) Eine Quadrik Q werde zuerst einer Parallelverschiebung um den Vektor $\binom{2}{-1}$ und anschließend einer Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel 45° (gegen den Uhrzeigersinn) unterworfen. Das Bild sei dann die Quadrik

$$Q' = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2w^2 - z = 0 \right\}.$$

Skizzieren Sie Q' und Q, und geben Sie eine Gleichung für Q (unter Verwendung der Koordinatenbezeichnungen x und y) an.

Abgabe bis 15.1.2020, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).